ANALYSIS

Teil 5

WURZELFUNKTIONEN

Methoden zur Kurven-Untersuchung:

Tangenten
Asymptoten
Extrem- und Wendepunkte

22 Musterfunktionen

Datei Nr. 44020

Friedrich Buckel

Stand 20. November 2013

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Wichtige Vorbemerkungen

Die Grundlagen findet man verteilt auf diese Texte:

(1) Im Text 18120 die Schaubilder, die **Halbparabeln** sind,

(2) Im Text 18121 die Schaubilder, die **Halbkreise** sind,

(3) im Text 18122: **Nullstellen und Definitionsbereich**,

(4) im Text 44012 die Ableitung von **Wurzelfunktionen,**

(5) in diesem Text (44020) die Ermittlung von **Extrem- und Wendepunkten** und die Spezialität der **senkrechten Tangenten** und **schrägen Asymptoten**.

Wichtig ist dabei, dass man im Auge behält, dass Wurzelfunktionen als **Umkehrfunktionen** entstehen können, weshalb die Datei 18110 (Umkehrfunktionen 1) von Bedeutung ist.
Ferner gibt es eine riesige Aufgabensammlung 44100 mit Lösungsdateien, in der (fast) alles gezeigt wird, was vorkommt. Die Lösungen dazu stehen in 44110, 44120 und 44130..

Im vorliegenden neu bearbeiteten Text werden auch die Methoden gezeigt, die man beim Einsatz von **CAS-Rechnern** anwenden kann.
Da inzwischen viele Schulen mit CAS-Rechnern arbeiten, werden die gezeigten Ableitungen kaum mehr manuell gerechnet. Ich lasse sie dennoch hier stehen!

Inhalt

1. Berechnung von Tangenten - *manuell*

a) Welche Gleichung hat die Tangente an die Kurve $y = \sqrt{x}$ an der Stelle x = 4?

1. Schritt: y-Koordinate des Berührpunkts:

$$y_B = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

Berührpunkt: $B(4\,|\,2)$

2. Schritt: 1. Ableitung berechnen:

$$f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Dies sollte man auswendig wissen!)

3. Schritt: Tangentensteigung berechnen:

$$m_T = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

4. Schritt: Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungsform erstellen: $\boxed{y - y_B = m \cdot (x - x_B)}$

$$y - 2 = \tfrac{1}{4} \cdot (x - 4)$$

$$y = \tfrac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{4}x + 1}$$

Anmerkung: Das Ergebnis lässt sich so kontrollieren:

Die Steigungszahl ist $m = \frac{1}{4}$. Geht man also von B aus um 4 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung, erreicht man einen Punkt auf der Tangente (C)

. Das Absolutglied (Die Zahl ohne x) ist 1, dort schneidet die Tangente die y-Achse. Das Absolutglied gibt stets die Schnittstelle mit der y-Achse an!

Merke:

Die **Punkt-Steigungsform** dient dazu, die Gleichung einer Geraden aufzustellen, wenn man ihre Steigung und einen Punkt der Geraden kennt:

$$\boxed{y - y_B = m \cdot (x - x_B)}$$

Die **Steigung** kann entweder aus 2 Punkten berechnet werden: $\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

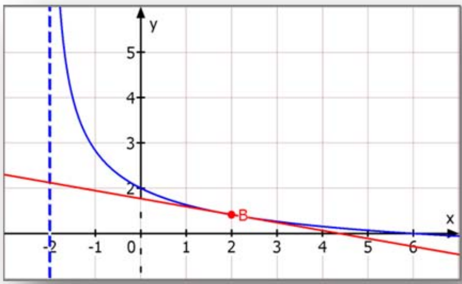
Oder bei einer Tangente über die 1. Ableitung: $\boxed{m_T = f'(x_B)}$

Die **y-Koordinate des Berührpunkts** kann man mit der Funktion berechnen, da der Berührpunkt ja auf der Kurve liegt: $\boxed{y_B = f(x_B)}$.

Daher kann man die **allgemeine Tangentengleichung** so aufschreiben:

$$\boxed{y - f(x_B) = f'(x_B) \cdot (x - x_B)}$$

b) **Welche Gleichung hat die Tangente an die Kurve $y = \frac{4}{\sqrt{2x+4}}$ an der Stelle x = 2?**



1. Schritt: y-Koordinate des Berührpunkts:

$$y_B = f(2) = \frac{4}{\sqrt{2\cdot 2+4}} = \frac{\cancel{4}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

Berührpunkt: $B\left(2 \mid \sqrt{2}\right)$

2. Schritt: 1. Ableitung berechnen:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x+4}} = 4\cdot(2x+4)^{-\frac{1}{2}}$$ (Weil im Zähler kein x steht!)

$$f'(x) = 4\cdot\left(-\tfrac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot(2x+4)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2} = -\frac{4}{\sqrt{2x+4}^3}$$

3. Schritt: Tangentensteigung berechnen:

$$m_T = f'(2) = -\frac{4}{\sqrt{8}^3} = -\frac{\cancel{4}}{{}_2\cancel{8}\cdot\sqrt{8}} = -\frac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

4. Schritt: Gleichung mit der Punkt-Steigungsform erstellen: $\boxed{y - y_B = m\cdot(x - x_B)}$

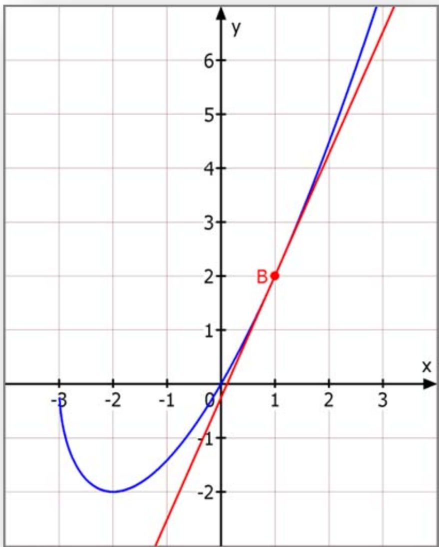
$$y - \sqrt{2} = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot(x-2)$$

$$y - \sqrt{2} = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot x + \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \qquad |+2$$

$$y = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot x + \underbrace{\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}_{\frac{5}{4}\sqrt{2}}$$

Ergebnis: T in B: $\boxed{y = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot x + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}}$

c) **Welche Gleichung hat die Tangente an die Kurve $y = x\cdot\sqrt{x+3}$ an der Stelle x = 1?**



1. Schritt: y-Koordinate des Berührpunkts:

$$y_B = f(1) = 1\cdot\sqrt{4} = 2 \Rightarrow B(1 \mid 2)$$

2. Schritt: 1. Ableitung berechnen: (Produktregel)

$$f(x) = x\cdot\sqrt{x+3}$$

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{x+3} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

3. Schritt: Tangentensteigung berechnen: $m_T = f'(1) = \frac{3+6}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{9}{4}$

4. Schritt: Gleichung mit der Punkt-Steigungsform erstellen: $\boxed{y - y_B = m\cdot(x - x_B)}$

$$y - 2 = \tfrac{9}{4}\cdot(x-1) \Rightarrow y = \tfrac{9}{4}x - \tfrac{9}{4} + 2 \Rightarrow \boxed{y = \tfrac{9}{4}x - \tfrac{1}{4}}$$

2. Berechnung von Tangenten – mit CAS-Rechnern

Ich zeige hier, wie man die Beispiele aus § 1 mit CAS-Rechnern lösen kann.
Dazu erstelle ich die Tangente nicht als Geradengleichung sondern als **Tangentenfunktion**, weil man damit die Möglichkeit hat, weitere Berechnungen mit den Tangenten anzustellen.

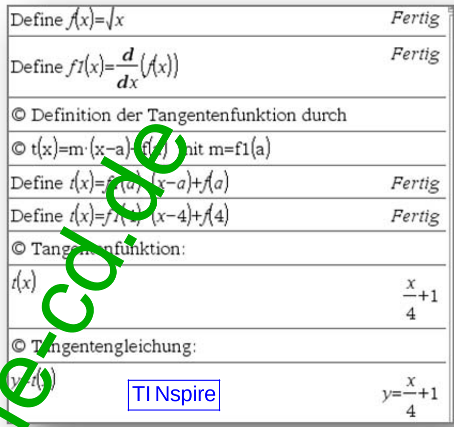
a) Welche Gleichung hat die Tangente an die Kurve $y = \sqrt{x}$ an der Stelle x = 4?

Aus der Punkt-Richtungsform erstellt man die allgemeine Tangentengleichung:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

bzw. die Tangentenfunktion für a = 4:

$$t(x) = f'(4) \cdot (x-4) + f(4)$$



Usw.